



TITLE:

チウネン圏の數學的説明

AUTHOR(S):

山岡, 亮一

CITATION:

山岡, 亮一. チウネン圏の數學的説明. 經濟論叢 1937, 45(5): 720-725

ISSUE DATE:

1937-11-01

URL:

<https://doi.org/10.14989/131018>

RIGHT:

京都市大學經濟學會 經濟論叢

第五卷 第五號

昭和二十二年十一月一日發行

論叢

稅制整理の基調

經濟學博士

沙見三郎

失業と勞銀

文學博士

高田保馬

『民約論』に於ける共同體思想

經濟學博士

石川興二

時論

時局と水產業

經濟學博士

蜷川虎三

研究

ルーテルの「職業」について

經濟學士

澤崎堅造

チルゴの租稅論

經濟學士

島恭彦

エッヂワースと誤差の問題

經濟學士

馬場吉行

說苑

一歐人の日本工業觀

經濟學士

大塚一朗

チウネン圈の數學的説明

經濟學士

山岡亮一

資本移動と景氣變動の問題

經濟學士

松井清

カレツキ景氣循環論

經濟學士

飯田藤次

附錄

新着外國經濟雜誌主要論題

(禁轉載)

チウネン圏の數學的説明¹⁾

山岡 亮一

一

ラウンハルトはその著書²⁾「國民經濟學の數學的基礎づけ」に於て特に二つの相競争する生産中心地の販賣地域境界の決定に關する問題をも論じてゐる。この書物中に一般に取扱はれてゐるのは、工業に必要な原料生産物であつて、たとへば石炭、原鑛等である。これら一切の原料生産物にあつては購入者が運搬費を負擔せねばならぬのが普通であつて、二つの生産中心地が同一價值を持つ商品を供給する場合には、消費者は常により、近き生産中心地を選ぶであらう。彼が就中詳細に論じてゐるのは運搬費が生産中心地からの距離と正比例的に増大する場合である。かゝる假定は必ずしも嚴密に正當なるものとは言へぬが、單純化により理論的取扱ひには甚だ有用なる理想型として適當してゐる。

今距離と無關係に動く單位數量の費用、換言すれば生産費及び利潤を p 單位數量を一キロメートル運搬するに要する運賃率を f とすれば e キロメートルの距離に於て單位數量の價格 p_e は

$$p_e = p + fe$$

この關係を説明するためラウンハルトは立體解析幾何學を使用してゐる。彼は平面上の生産中心點 C に於て長さ p の垂線を立てる。これ即ち中心點 C に於ては單位數量自身が p なる價格を持つことを意味する。 C 點より e_1 の距離にあるすべての點は言ふまでもなく一の圈上にある、この圈上のすべての點に於て單位數量は同一價格 $p + fe_1$ を有す、同様にして C 點より e_2 の距離にある他の圈上のすべての點に於ては單位數量價格は $p + fe_2$ となつてゐる。

さてこれら各點に於て單位數量價格を垂直にとるならば、これらの終點はことごとく、人がラウンハルトに従ひ競争漏斗 (Konkurrenzrichter) と記す一錐面上にある。圓錐の頂點に於る一の補助平面をもとの平

註) この小論は下記の論文の簡單なる紹介である。

- 1) M. Miller; Die Thünenschen Kreise in mathematischer Behandlung (Landwirtschaftliche Jahrbücher Bd. 82, Heft 2, 1935) S. 161 ff.
- 2) Vgl. W. Launhardt; Mathematische Begründung der Volkswirtschaftslehre Leipzig, 1885.

面と平行ならしめるならば、圓錐の凸面はすべて補助平面と同一角 α をなす、これは $\cos \alpha = 1$ なる關係により固定される。 xy 平面がもとの平面と合致し、C 點に於てたてられたる垂線が正の z 軸となる如くに空間に直角座標系をとれば、錐面の方程式は次の如し。

$$z = p_1 + f_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

唯一の生産中心點が問題となる限り、 x 軸、 y 軸の位置は重要ではないが、二つの生産中心點を取扱ふならば、確かに我々は x 軸或は y 軸の位置をも考慮せねばならない。かくて第一の競争漏斗形が上述せる仕方で空間に存するものとすれば、その方程式は

$$z = p_1 + f_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

この生産中心點に接近して第二の中心點が存する。

その平面座標は $x = a$ 、 $y = b$ である。更に單位數量價格を p_2 、その運賃率を f_2 とする。しからは第二の錐面の方程式は

$$z = p_2 + f_2 \cdot \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

我々はこゝに兩地域の競争境界として兩圓錐の交切

線の xy 平面への射影を得るのである。ラウンハルトは此の曲線を Isostanie と名づける。この二つの z の値を等値することにより、其の方程式が得られる。即ち

$$p_1 + f_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = p_2 + f_2 \cdot \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

II

我々は以上ラウンハルトの理論の根本思想をそれが後の説明を理解するに必要な限りに於て展開するとにのみ限定して來た。上述せる如くに運搬費の負擔者は一般に購買者である所の工業生産品に必要な原料生産物と異つて、農業生産物にあつては運搬費はこれを生産者が負擔せねばならぬ。この理由としては次の點に求めらるべきである。工業に必要な原料生産物の生産はその廣さから言つて農業生産に較べると著しく小であり、その上前者は場所的に甚たく制限せられてゐるが、これと反對に後者は何等かの形で至る所に見出されるからである。この故に工業生産中心地の場所的位置並びに性格は全く土地財寶の存在により

決定せられるが、農業生産の方式は完全にはなくとも、しかも著しく購入の諸條件により影響をうける。

チウネンはこの考へを最初に彼の古典的著書「孤立國」³⁾に於て甚だ鋭く展開した。チウネンは現實には殆ど全く妥當せぬ假定から出發した。即ち一の大都市が豐沃なる平野の中央にあり、平野には舟楫すべき河流も運河もない。都市から最も遠く離れた所では未耕の荒地に終つてゐる。この命題によりチウネンは國家を他の世界から遮斷したことも明確にしてゐる。この都市を圍つて環狀をなすチウネン園なる名稱で知られてゐる個々の經營地域が集つてゐる。この各環に支配的である經營方式は、この方式に適當なる自然生産物の運送に必要な運搬費の高さにより決定せられる。チウネンは言つてゐる。「都市からの距離が遠くなるに従つて、土地は愈々その價值に比して小なる運搬費を要する生産物の生産に向けられる」と。

かゝるチウネンの時代には農村の交通手段としては殆ど専ら荷馬車があつたのみだが、今日完全に鐵道と

貨物自動車とに壓倒せられたから、そのためにチウネン園は著しい狂ひを生じた。その上個々の自然生産物の價值の比率も同時に著しく變化したので、チウネンの著書にあげられた數字記録は大體に於て歴史的意義を有するに過ぎぬ。それにも拘はらず今日と雖もチウネンの見出した結論は誤りではない。従つてその正確なる定式化の正當なることは今更こゝにあらためて論證するを要しない。

三

次に我々はチウネンの論じた所と關聯して、生産地が市場地から遠ざかるに従ひ、生産物價格は小となるといふ考から出發しよう。生産物單位價格が都市に於て p であれば、上に採用した記號そのまゝ使用すれば、 e キロメートルの距離に於る單位價格は、

$$p_e = p - f \cdot e$$

f は農業生産物の場合には工業生産物と異つて一單位數量の一キロメートルあたりの運搬費のみならず、生産物の保存可能性によつても決定せられる。即ち商

3) Vgl. v. Thünen; Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft u. Nationalökonomie 1826.

品が如何なる長期の輸送にも耐へぬ場合、たとへば生
 蔬菜、生乳等々、 f はより大となる。運搬の期間とい
 ふものが何等重要でない生産物に對しては、 f は一キ
 ロメートル當りの單位數量の運賃率に等しい。この區
 別は嚴密に言へば第一圈（自由經營）の生産物に於ての
 み觀察せられる。その上この區別は第一圈の最重要な
 る運搬手段を構成するスピードある自動車によつて著
 しく緩和せられる。 $p_2 \parallel 0$ であれば、即ちたとへば
 $e = \frac{1}{2} p_2$ なる距離にあつては、この商品の生産はその收
 益限界點に達する、 $\frac{1}{2} p_2$ より大なる距離ではこの生産
 物は損失を以てのみ販賣せられる。この限界點は、
 (一) p の増大、(二) の減小により外方におし出され
 ることが出来る。

四

併しながら都市はこの一生産物を必要とするのみな
 らず、他の一聯の生産物をも亦必要とする。人はそれ
 故都市より遠くまでこの生産物、或はこの生産物と經
 濟關係より見て等價值を有する生産物を生産すること

なく、この生産物のかはりに價值より、言へばより小で
 はあるが、運搬費を要することより小であり、従つて
 その生産が都市からより離れた場所に於ても收益をあ
 げる所の生産物を生産した。この生産物はかくてその
 價值に較べて比較的小なる重量を持つに相違ない。

$$p_2 \parallel p_1 - f_1 \cdot e \quad p_2 \angle p_1 \quad f_1 \angle f_2$$

これ等兩生産地域間の境界は都市から e_{12} なる距離に
 あたる。而して e_{12} の値は次の方程式から得られる。

$$p_1 - f_1 \cdot e_{12} = p_2 - f_2 \cdot e_{12} \quad e_{12} = \frac{p_1 - p_2}{f_1 - f_2}$$

$p_1 - p_2$ なる價格差が大となればなる程、 e_{12} は外に延
 び、運賃率の差異が大である程、生産中心點の境界は
 都市に接近する。今都市が直角座標系の○點にありと
 する、一生産物の價格は錐面によりあらはされ得る。
 かる錐面の方程式は

$$z = p_1 - f_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

p_1 はこの場合圓錐の高さである。

$$f_1 = f_2 \alpha_1$$

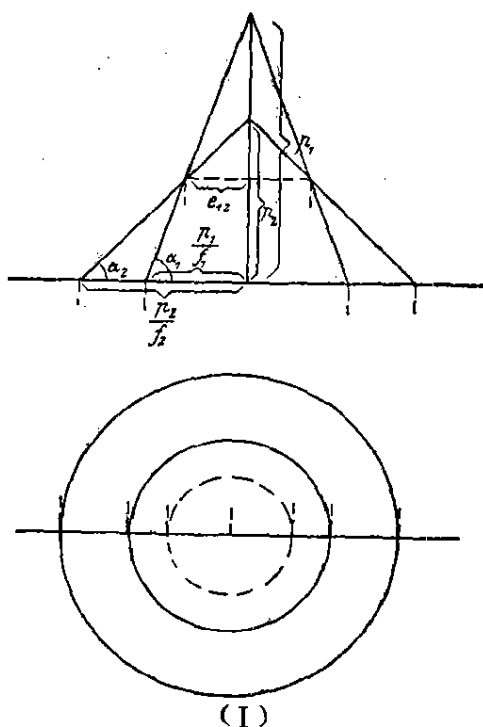
こゝで α_1 は xy 平面に對して圓錐の凸面線のなす角を

いふ。次の方程式

$$z = p_1 - f_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = p_2 - f_2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

を持つ二つの圓錐は半徑 $e_{12} = \frac{p_1 - p_2}{f_1 - f_2}$ なる圓に於て交切する。この圓のxy平面への射影は二つの環狀の生産地域の境界線である。境界半徑 e_{12} の數式による決定はこれを圖解すれば



今や都市には一聯の錐面が存在し、その互に接續する二つの圓錐は一の圓に於て交切する。pとfが小となるに従ひ、生産地域は愈々都市から遠ざかるのである。

る。チウネンの假定に従へば孤立國內では唯一の大都市が見出されるのみだ。而してこの假定は根本思想の展開のためには必要であつた。併し現實には大抵の場合一の國家には、種々の大きさの多數の都市が横つてゐる。従つてこゝにも相互に曲線を以て切り合ふ多くの圓錐が生ずる。一都市の最も外側の錐面は全くあらはれないで、それに先ち隣接都市の圓錐により一の境界線が劃されるであらう。我々は次に二つの隣接せる錐面のこの境界決定が如何になされるかを究明したい。

五

我々は簡單のために二つの圓錐を假定しよう、その中の一はその垂線の底點を座標原點に持ち、第二の圓錐の垂線の底點は $x=a, y=b$ なる點にあるものとす、然らば二個の圓錐の方程式は次の如くである。

$$z = p_1 - f_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

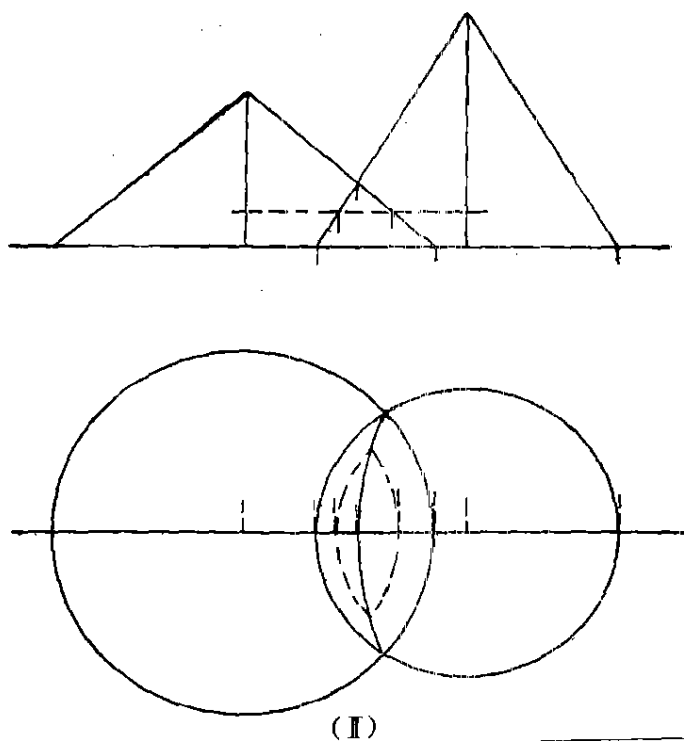
$$z = p_2 - f_2 \cdot \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

この二個の圓錐は空間曲線に於て交切する。併しながら我々にとつてはこの曲線がxy平面に投ずる射影

のみが問題となる。zを等置することによりその方程式を得る。

$$p_1 - f_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = p_2 - f_2 \cdot \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

これを圖解すれば次の如し。



言ふまでもなく圓錐の高さは農業生産物への需要に依存する。それ故にかゝる圓錐の高さは販賣市場の大

チウネン圈の數學的説明

さにも依存する。大都市は従つて大なる高さの圓錐を持つ。かくて大都市の圓錐が小隣接町村の圓錐を全く被ふことも起り得る。こゝでは全く境界構成はなされない。か様に農業生産物の市場關係の姿には主として大都市が決定的であることがわかる。

以上生産地の販賣地よりの距離が農業生産物の價值にあたへる影響に關するチウネンの研究と關聯して、立體解析幾何學の助けにより、チウネン圈の數學的説明をこゝろみた。これら各圈の境界は二つの圓錐の截圖形 (Schmittfigur) のもとの平面上に投ずる射影である。